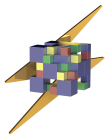
Lecture 03

이진 정수의 연산

이재진

서울대학교 컴퓨터공학부

http://aces.snu.ac.kr



THUNDER Research Group
Seoul National University
서울대학교 천둥 연구실

이진 정수의 논리 연산

- n-비트 이진수의 논리연산은 비트 단위로 주어진 논리연산을 적용함
  - NOT, AND, OR, NOR, NAND, XOR, XNOR
- C 언어는 NOT, AND, OR, XOR를 지원함
  - ~, &, |, ^
  - 피연산자는 정수 타입이어야 함

이진 정수의 시프트(shift) 연산

- 주어진 n-비트 이진수의 모든 비트를 주어진 회수만큼 주어진 방향(오른쪽 또는 왼쪽)으로 이동시키는 연산
  - $x \gg m$: n-비트 이진수 x를 m 비트만큼 왼쪽으로 시프트하는 연산
  - $x \ll m$: n-비트 이진수 x를 m 비트만큼 오른쪽으로 시프트하는 연산
  - 논리 시프트(logical shift)와 산술 시프트(arithmetic shift)가 있음
    - 논리 시프트와 산술 시프트의 구분은 첨자 L과 A를 붙여 표시

$$10011101_2 \gg_L 3 = 00010011_2$$

$$10011101_2 \ll_L 3 = 11101000_2$$

$$10011101_2 \gg_A 3 = 11110011_2$$

$$10011101_2 \ll_A 3 = 11101000_2$$

시프트 연산과 곱셈

- 부호 없는 수나 2의 보수 표현에서 어떤 수 x를 왼쪽으로 m 비트 시프트 하는 것은 x에 2^m을 곱하는 것과 동일
- 부호 없는 수

$$00001101_2(13_{10}) \ll 3 = 01101000_2(104_{10})$$

- 2의 보수 표현

$$11111101_2(-3_{10}) \ll 3 = 11101000_2(-24_{10})$$

시프트 연산과 나눗셈

- n-비트 부호 없는 수의 표현에서 어떤 수 x를 오른쪽으로 m 비트 논리 시프트나 산술 시프트 하는 것은 x를 2^m으로 나누어 몫을 취하는 것과 동일

$$1111101_2(29_{10}) \gg 3 = 00000011_2(3_{10})$$

- 2의 보수 표현에서는 $x \geq 0$ 일 경우, x를 오른쪽으로 m 비트 산술 시프트 하는 것은 부호 없는 수와 마찬가지로 x를 2^m으로 나누어 몫을 취하는 것과 같음
  - 하지만, $x < 0$일 경우는 x를 2^m으로 나누어 몫을 취하는 것과 다름

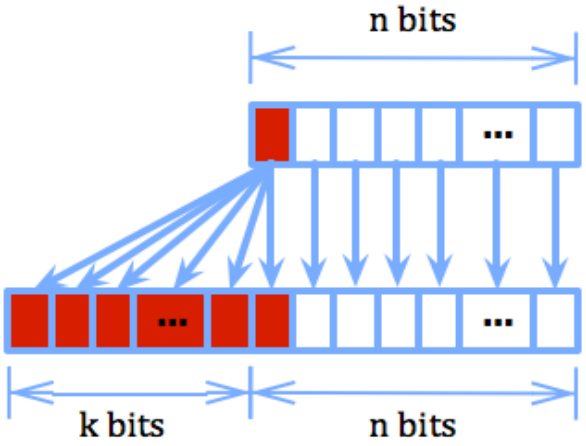
$$11111001_2(-7_{10}) \gg 2 = 11111110_2(-2_{10})$$

C 언어의 시프트 연산

- 오른쪽 시프트와 왼쪽 시프트 연산을 지원
- n-비트 수 x의 오른쪽 m-비트 시프트는 $x \gg m$으로 표현하고, 왼쪽 m-비트 시프트는 $x \ll m$으로 표현
- C99 표준은 음수에 대한 오른쪽 시프트를 정의하지 않음
  - 동작은 C 컴파일러의 구현에 따라 다름
  - 즉, 오른쪽 시프트가 논리 시프트인지 산술 시프트인지는 컴파일러의 구현에 따라 다름

부호 확장(sign extension)

- n-비트 2의 보수 표현을 같은 값을 가지는 $(n + k)$-비트 2의 보수 표현으로 변환할 때 필요
- 하위 n 비트는 원래의 n-비트 2의 보수 표현
- 원래의 부호 비트로 나머지 k 개의 비트를 모두 채움



부호 없는 이진 정수의 덧셈

- 십진수의 덧셈과 비슷
- 어떤 연산의 결과로 나온 값이 표현할 수 있는 값의 범위를 넘어가서 표현할 수 없을 경우를 오버플로우(overflow)라고 함
  - n-비트 부호 없는 수의 덧셈을 수행할 때 MSB에서 나오는 받아올림이 1 일 경우

받아올림	0	0	0	1	
		1	0	0	1 (9_{10})
+		0	1	0	1 (5_{10})
	0	1	1	1	0 (14_{10})

받아올림	1	1	1	1	
		1	0	1	1 (11_{10})
+		0	1	1	1 (7_{10})
	1	0	0	1	0 (18_{10})

부호 없는 이진 정수의 덧셈

- modulo 2^n 덧셈을 수행하는 것과 같음
  - 덧셈 결과로 나온 $n+1$개의 비트 중 하위 n 개의 비트를 취하고 MSB를 무시
- $0 \leq x + y < 2^n$
  - $(x + y) \bmod 2^n = x + y$
- $2^n \leq x + y \leq 2^{n+1} - 2$: 오버플로우
  - $(x + y) \bmod 2^n = (x + y) - 2^n$

$$x +_U^n y = (x + y) \bmod 2^n$$
$$= \begin{cases} x + y, & 0 \leq x + y < 2^n \\ x + y - 2^n, & 2^n \leq x + y \leq 2^{n+1} - 2 \text{ (오버플로우)} \end{cases}$$

2의 보수 표현의 덧셈

- 두 정수 x와 y를 n-비트 2의 보수 표현으로 나타내었을 때
  - $b_x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$와 $b_y = y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$
- $x +_C^n y$
  - b_x와 b_y를 부호 없는 이진 표현으로 취급하여 모듈로-2^n 덧셈을 수행한 다음, 그 결과를 다시 2의 보수 표현으로 해석하는 것

2의 보수 표현의 덧셈

- 오버플로우가 일어날 수 있음
  - 더하는 과정에서 MSB로 들어가는 받아올림이 MSB에서 나오는 받아올림과 다르면 오버플로우

		MSB				
받아올림	0	1	1	1		
		0	1	1	1	(7_{10})
+		0	1	1	1	(7_{10})
		1	1	1	0	

MSB로 들어가는 받아올림	x의 부호 비트	y의 부호비트	결과의 부호 비트	MSB에서 나오는 받아올림
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

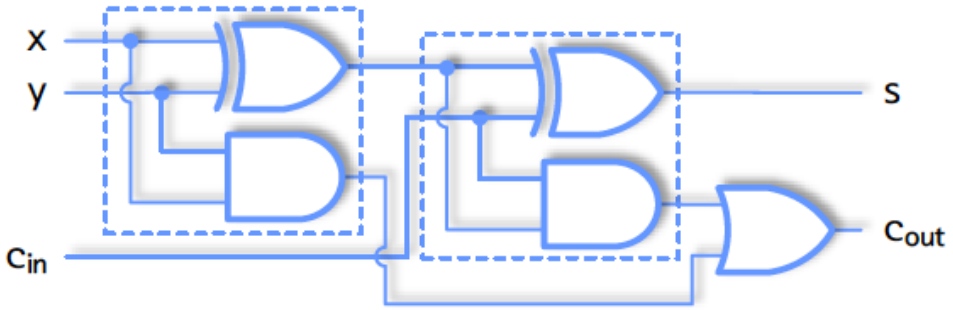
2의 보수 표현의 덧셈

$$x +_C^n y = \begin{cases} x + y - 2^n, & 2^{n-1} \leq x + y \text{ (오버플로우)} \\ x + y, & -2^{n-1} \leq x + y < 2^{n-1} \\ x + y + 2^n, & x + y < -2^{n-1} \text{ (오버플로우)} \end{cases}$$

전가산기와 반가산기

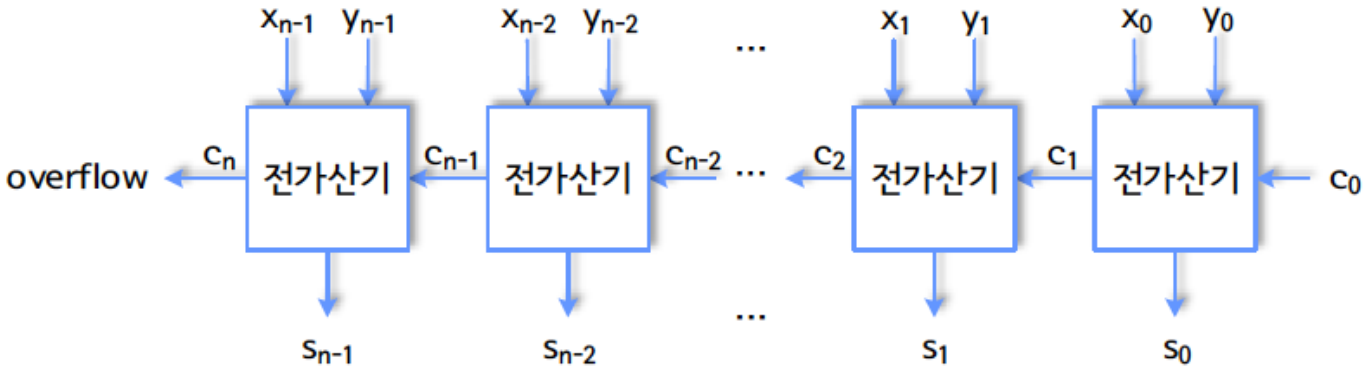
- 반가산기
  - 두 개의 비트 x와 y를 더하여 그 합 s와 받아올림(carry) c를 출력
- 전가산기
  - 세 개의 비트 x, y, c_{in}을 입력으로 받아들여 이들의 합을 한 개의 비트 s와 받아올림 c_{out}으로 출력

x	y	c_{in}	s	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



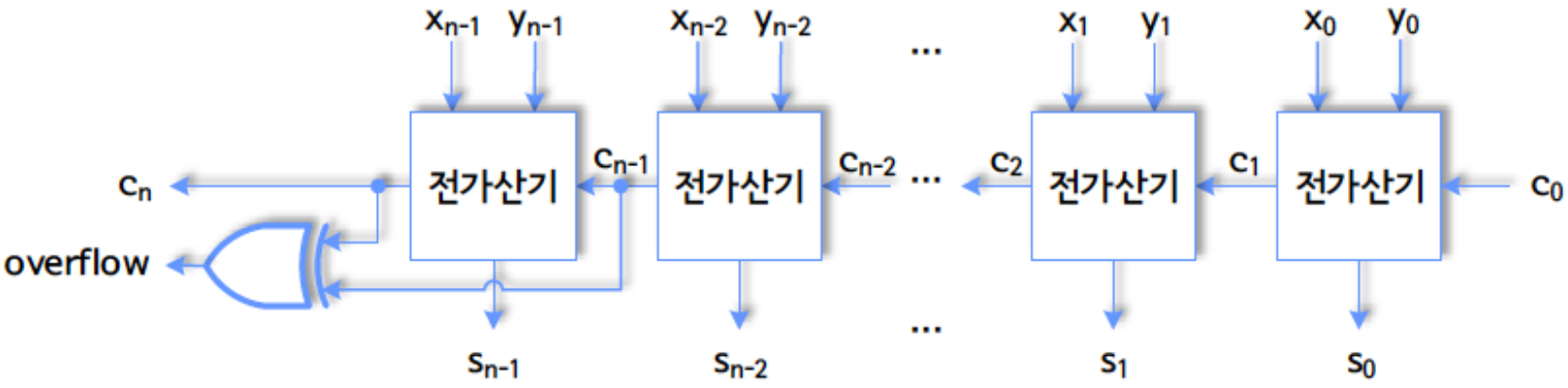
부호 없는 수의 덧셈 하드웨어

- n-비트 가산기(adder)
- 전가산기 $n-1$ 개와 한 개의 반가산기를 연결하여 두 개의 n-비트 부호 없는 이진수 $x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$와 $y = y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$의 덧셈 $x +_U^n y$을 수행하여 결과로 $s = s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_0$를 출력
  - c_n이 1 이면 오버플로우



2의 보수 표현의 덧셈 하드웨어

- 부호 없는 이진수의 덧셈 $+_U^n$을 이용
  - 오버플로우 감지만 다름



이진 정수의 뺄셈

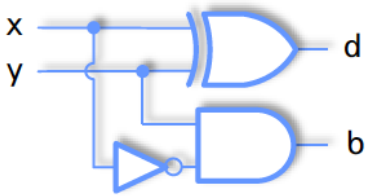
- 부호 없는 수
  - 십진수의 뺄셈과 그 방식이 같음
- 2의 보수 표현
  - 2의 보수 표현으로 표현된 두 정수 x와 y 뺄셈 $x - y$는 $x - y = x + (-y)$ 이므로 감수(減數) y의 2의 보수를 취하여 덧셈으로 변경
  - $x + (-y) = x + y' + 1$

받아내림	0	1	0	0	
		1	0	0	1 (9_{10})
−		0	1	0	1 (5_{10})
		0	1	0	0 (4_{10})

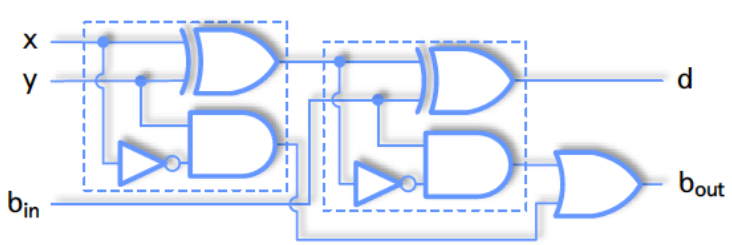
반가산기와 전감산기

- 반감산기(半減算器, half subtractor)
  - 두 개의 비트 x와 y를 입력으로 받아들여 $x - y$을 계산한 결과를 차 d와 받아내림(borrow) b로 출력
- 전감산기(全減算器, full subtractor)
  - 세 개의 비트 x, y, b_{in}을 입력으로 받아들여 $x - y - b_{in}$을 계산한 결과를 한 개의 비트 d와 받아내림 b_{out}으로 출력

x	y	d	b
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

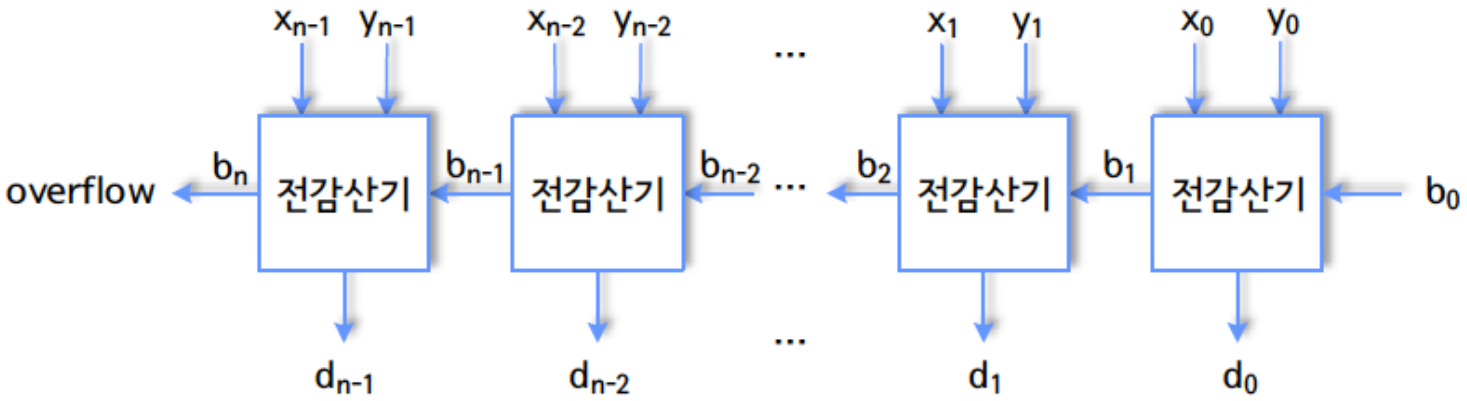


x	y	b_{in}	d	b_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



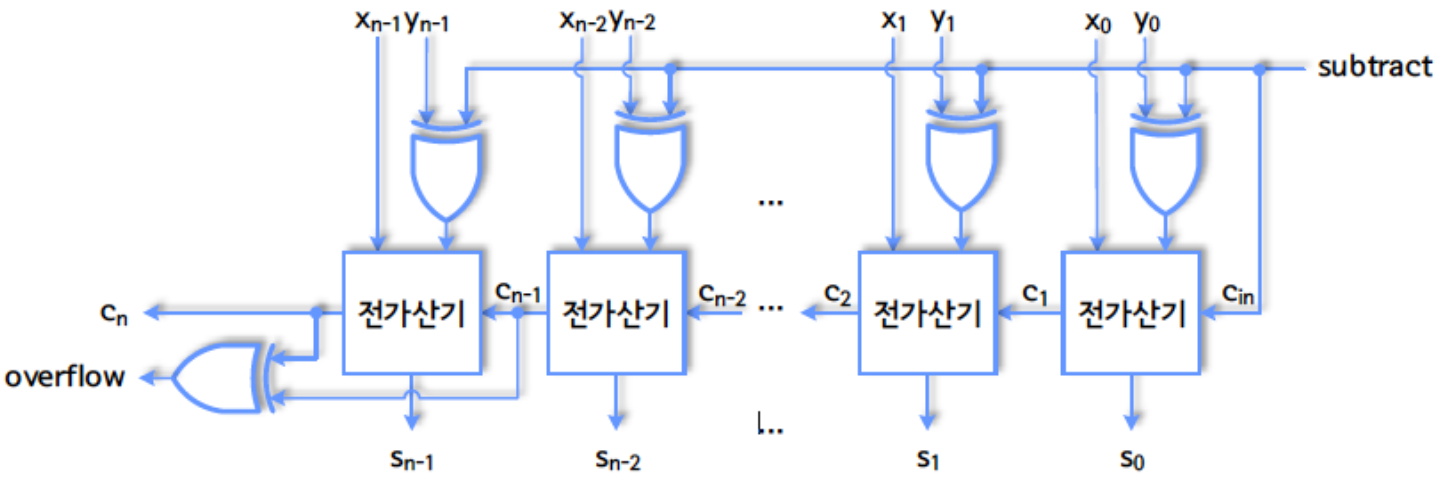
부호 없는 수의 뺄셈 하드웨어

- $n-1$ 개의 전감산기와 한 개의 반감산기를 이용하여 구현
- $x < y$ 이면 b_{n-1}이 1 이 되고, 결과가 n-비트 부호 없는 이진수로 표현할 수 없는 음수가 되어 오버플로우가 일어남



2의 보수 표현의 뺄셈 하드웨어

- Subtract=0, 덧셈 수행
- Subtract=1, 뺄셈 수행



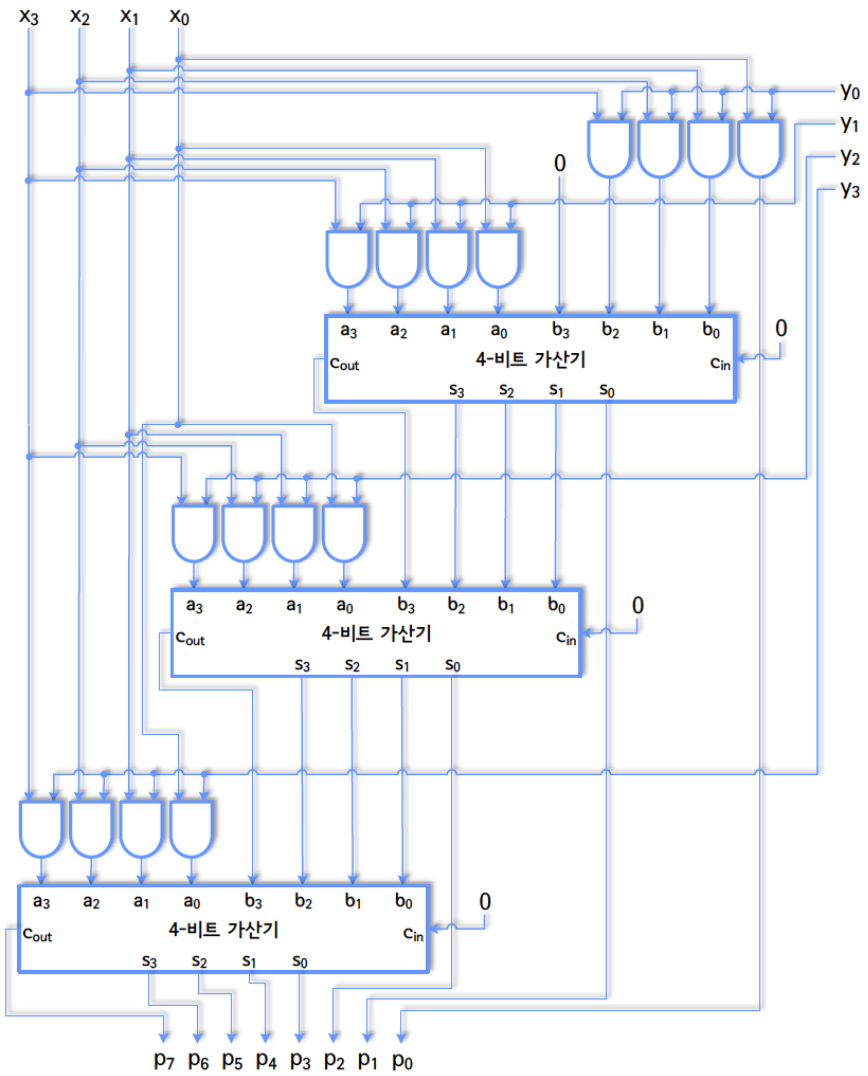
부호 없는 수의 곱셈

- 십진수의 곱셈과 그 원리가 같음

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\
\times & & & & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\
 & & & & x_3 \cdot y_0 & x_2 \cdot y_0 & x_1 \cdot y_0 & x_0 \cdot y_0 \\
+ & & & x_3 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_1 & x_0 \cdot y_1 & \\
+ & & x_3 \cdot y_2 & x_2 \cdot y_2 & x_1 \cdot y_2 & x_0 \cdot y_2 & & \\
+ & x_3 \cdot y_3 & x_2 \cdot y_3 & x_1 \cdot y_3 & x_0 \cdot y_3 & & & \\
\hline
 & p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
$$

부호 없는 수의 곱셈

- 하드웨어는 $(n-1)^2$ 개의 전가산기(FA)와 $n-1$ 개의 반가산기(HA)를 이용



2의 보수 표현의 곱셈

$$x \cdot y = \left(\left(-x_3 2^3 + \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot 2^i\right) \times \left(-y_3 2^3 + \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot 2^i\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&(-x_3 2^3 + x_2 2^2 + x_1 2^1 + x_0 2^0) \times (-y_3 2^3 + y_2 2^2 + y_1 2^1 + y_0 2^0) \\
&= (-x_3 \cdot y_0 \cdot 2^3 + x_2 \cdot y_0 \cdot 2^2 + x_1 \cdot y_0 \cdot 2^1 + x_0 \cdot y_0 \cdot 2^0) \\
&+(-x_3 \cdot y_1 \cdot 2^4 + x_2 \cdot y_1 \cdot 2^3 + x_1 \cdot y_1 \cdot 2^2 + x_0 \cdot y_1 \cdot 2^1) \\
&+(-x_3 \cdot y_2 \cdot 2^5 + x_2 \cdot y_2 \cdot 2^4 + x_1 \cdot y_2 \cdot 2^3 + x_0 \cdot y_2 \cdot 2^2) \\
&-(-x_3 \cdot y_3 \cdot 2^6 + x_2 \cdot y_3 \cdot 2^5 + x_1 \cdot y_3 \cdot 2^4 + x_0 \cdot y_3 \cdot 2^3)
\end{aligned}$$

2의 보수 표현의 곱셈

- 부분적인 곱셈 결과를 나타내기 위해 부호확장이 필요

1						x_3	x_2	x_1	x_0
2	×					y_3	y_2	y_1	y_0
3		$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_2 \cdot y_0$	$x_1 \cdot y_0$	$x_0 \cdot y_0$
4	+	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_1$	$x_0 \cdot y_1$	0
5	+	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_2$	$x_0 \cdot y_2$	0	0
6	−	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_3$	$x_0 \cdot y_3$	0	0	0
7		p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

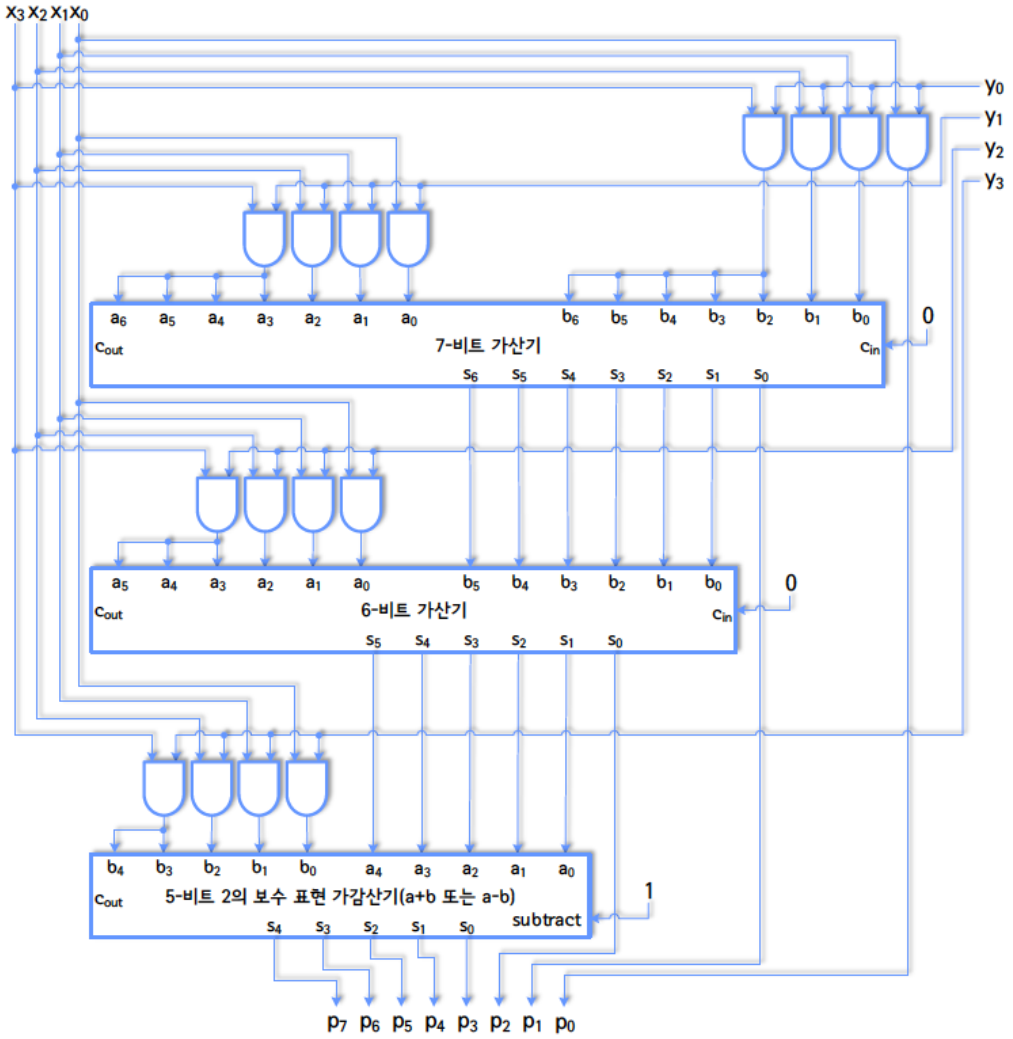
1						x_3	x_2	x_1	x_0
2	×					y_3	y_2	y_1	y_0
3		$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_2 \cdot y_0$	$x_1 \cdot y_0$	$x_0 \cdot y_0$
4	+	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_1$	$x_0 \cdot y_1$	0
5	+	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_2$	$x_0 \cdot y_2$	0	0
6	+	$\sim(x_3 \cdot y_3)$	$\sim(x_3 \cdot y_3)$	$\sim(x_2 \cdot y_3)$	$\sim(x_1 \cdot y_3)$	$\sim(x_0 \cdot y_3)$	1	1	1
7	+	0	0	0	0	0	0	0	1
8		p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

2의 보수 표현의 곱셈 하드웨어

1						x_3	x_2	x_1	x_0
2	×					y_3	y_2	y_1	y_0
3		$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_2 \cdot y_0$	$x_1 \cdot y_0$	$x_0 \cdot y_0$
4	+	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_1$	$x_0 \cdot y_1$	0
5	+	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_2$	$x_0 \cdot y_2$	0	0
6	+	$\sim(x_3 \cdot y_3)$	$\sim(x_3 \cdot y_3)$	$\sim(x_2 \cdot y_3)$	$\sim(x_1 \cdot y_3)$	$\sim(x_0 \cdot y_3)$	1	1	1
7	+	0	0	0	0	0	0	0	1
8		p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

1						x_3	x_2	x_1	x_0
2	×					y_3	y_2	y_1	y_0
3		$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_3 \cdot y_0$	$x_2 \cdot y_0$	$x_1 \cdot y_0$	$x_0 \cdot y_0$
4	+	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_1$	$x_0 \cdot y_1$	0
5	+	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_2$	$x_0 \cdot y_2$	0	0
6	+	$\sim(x_3 \cdot y_3)$	$\sim(x_3 \cdot y_3)$	$\sim(x_2 \cdot y_3)$	$\sim(x_1 \cdot y_3)$	$\sim(x_0 \cdot y_3)$	0	0	0
7	+	0	0	0	0	1	0	0	0
8		p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

2의 보수 표현의 곱셈 하드웨어



부호 없는 이진수의 나눗셈

- 십진수의 나눗셈과 원리가 같음
- 기본적으로 연속적인 뺄셈을 수행하여 제수가 피제수에 몇 개(몫) 들어 있는가를 알아내는 과정

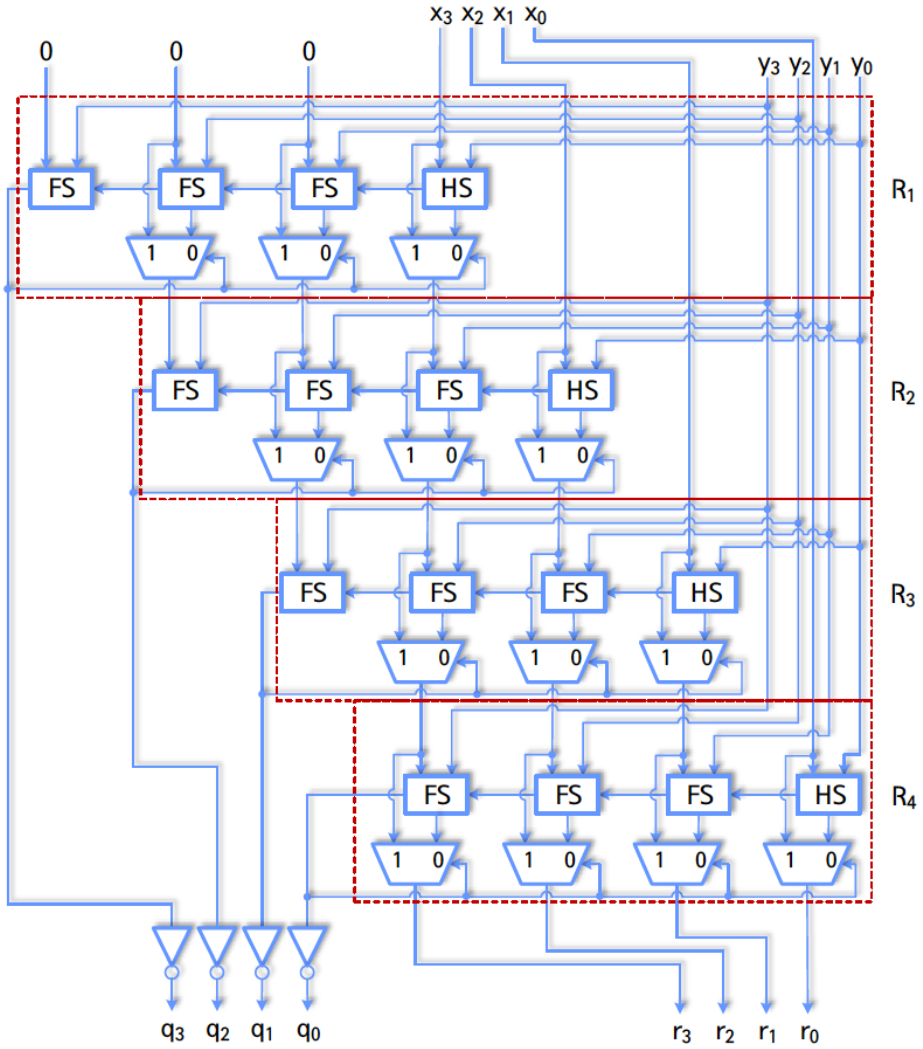
							1	1	(3_{10})
(4_{10})	1	0	0		1	1	0	1	(13_{10})
				−	1	0	0		
					0	1	0	1	
				−		1	0	0	
						0	0	1	

부호 없는 이진수의 나눗셈

- n-비트 부호 없는 이진수 x를 y로 나누어 몫 q와 나머지 r을 구하는 과정은 $R_0 = x$로 놓은 후 매 단계 마다 부분적인 나머지(partial remainder) R_i $(1 \le i \le n)$를 계산하는 과정
  - $R_i = R_{i-1} - q_{n-i} \cdot y \cdot 2^{n-i}$
- $q_{n-i} = 1$을 가정하고 R_i를 계산하여 $R_i \ge 0$ 이면 $q_{n-i} = 1$로 확정하고, 그렇지 않으면 $q_{n-i} = 0$ 과 $R_i = R_{i-1}$ 로 놓음

								q_3	q_2	q_1	q_0	
	y_3	y_2	y_1	y_0				0	0	1	1	$q = 3_{10}$
$y = 4_{10}$	0	1	0	0		0	0	0	1	1	0	1	$R_0 = x = 13_{10}$
					−	$q_3 0$	$q_3 1$	$q_3 0$	$q_3 0$	0	0	0	$q_3 \cdot y \cdot 2^3$
						~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~				~~$R_1 = R - y \cdot 2^3$~~
						0	0	0	1	1	0	1	$R_1 = R_0$
					−		$q_2 0$	$q_2 1$	$q_2 0$	$q_2 0$	0	0	$q_2 \cdot y \cdot 2^2$
							~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~			~~$R_2 = R_1 - y \cdot 2^2$~~
							0	0	1	1	0	1	$R_2 = R_1$
					−			$q_1 0$	$q_1 1$	$q_1 0$	$q_1 0$	0	$q_1 \cdot y \cdot 2^1$
								0	0	1	0	1	$R_3 = R_2 - y \cdot 2^1$
					−				$q_0 0$	$q_0 1$	$q_0 0$	$q_0 0$	$q_0 \cdot y \cdot 2^0$
									0	0	0	1	$R_4 = R_3 - y \cdot 2^0$
								r_3	r_2	r_1	r_0	

부호 없는 이진수의 나눗셈 하드웨어



2의 보수 표현의 나눗셈

- 2의 보수 표현에서 정수 x를 $y(\neq 0)$로 나눈 몫 q와 나머지 r을 구하려면
  - 우선 $|x|$를 $|y|$로 나눈 몫 q'과 나머지 r'을 부호 없는 수의 나눗셈을 이용하여 구함
  - 그런 다음 x와 y의 부호가 다르면 $q = -q'$로 놓고, 같으면 $q = q'$로 놓음
  - $x < 0$ 이면 $r = -r'$로, $x \geq 0$ 이면 $r = r'$로 놓음

2의 보수 표현의 나눗셈

- $r = x$로 놓고 피제수 x와 제수 y의 부호에 따라 $|y|$가 $|x|$에 들어 있는 개수 q'을 계산
  - $x \geq 0,\ y \geq 0 : r \geq 0$ 일 동안 y를 r에서 연속적으로 빼서
  - $x \geq 0,\ y < 0 : r \geq 0$ 일 동안 y를 x에 연속적으로 더하여
  - $x < 0,\ y \geq 0 : r \leq 0$ 일 동안 y를 x에 연속적으로 더하여
  - $x < 0,\ y < 0 : r \leq 0$ 일 동안 y를 x에서 연속적으로 빼서
- x와 y의 부호가 다를 때는 $q = -q'$, 그렇지 않으면 $q = q'$

2의 보수 표현의 나눗셈

- n-비트 2의 보수 표현인 $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$와 $y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$로 표현된 이진수 x와 y가 주어졌을 때, x를 y로 나누어 몫 q와 나머지 r을 구하는 과정은, $R_0 = x$로 놓은 다음 매 단계 마다 부분적인 나머지 R_i $(1 \le i \le n)$를 계산하는 과정
  - $R_i = R_{i-1} - (-1)^{x_{n-1}} \cdot (-1)^{y_{n-1}} \cdot {q'}_{n-i} \cdot y \cdot 2^{n-i}$
- $q_{n-i} = 1$로 가정하여 R_i를 계산한 다음, R_{i-1}과 R_i의 부호가 같거나 $R_i = 0$ 이면 $q_{n-i} = 1$ 로 확정하고, 그렇지 않으면 $q_{n-i} = 0$ 과 $R_i = R_{i-1}$ 로 놓음
  - y가 R_{i-1}에 2^{n-i} 개 들어 있는가를 확인하는 과정

2의 보수 표현의 나눗셈

								q'_3	q'_2	q'_1	q'_0	
	y_3	y_2	y_1	y_0				0	0	1	0	$q = 2_{10}$
$y = 3_{10}$	0	0	1	1		1	1	1	1	0	0	1	$R_0 = x = -7_{10}$
					+	$q'_3 0$	$q'_3 0$	$q'_3 1$	$q'_3 1$	0	0	0	$q'_3 \cdot y \cdot 2^3$
						~~0~~	~~0~~	~~1~~	0	0	0	~~1~~	~~$R_1 = R_0 + y \cdot 2^3$~~
						1	1	1	1	0	0	1	$R_1 = R_0$
					+	$q'_2 0$	$q'_2 0$	$q'_2 0$	$q'_2 1$	$q'_2 1$	0	0	$q'_2 \cdot y \cdot 2^2$
						~~0~~	~~0~~	~~0~~	0	~~1~~	0	~~1~~	~~$R_2 = R_1 + y \cdot 2^2$~~
						1	1	1	1	0	0	1	$R_2 = R_1$
					+	$q'_1 0$	$q'_1 0$	$q'_1 0$	$q'_1 0$	$q'_1 1$	$q'_1 1$	0	$q'_1 \cdot y \cdot 2^1$
						1	1	1	1	1	1	1	$R_3 = R_2 + 2^1$
					+	$q'_0 0$	$q'_0 0$	$q'_0 0$	$q'_0 0$	$q'_0 0$	$q'_0 1$	$q'_0 1$	$q'_0 \cdot y \cdot 2^0$
						~~0~~	~~0~~	~~0~~	0	0	~~1~~	0	~~$R_4 = R_3 + y \cdot 2^0$~~
						1	1	1	1	1	1	1	$R_4 = R_3$
									r_3	r_2	r_1	r_0	

2의 보수 표현의 나눗셈 하드웨어